

RÉSOLUTION DU PROBLÈME BIDIMENSIONNEL DE STEFAN PAR UNE MÉTHODE IMPLICITE DE DIRECTIONS ALTERNÉES

A.M.CAMES-PINTAUX¹, L.E. GOODRICH² et J. AGUIRRE-PUENTE¹

¹ Laboratoire d'Aérothermique du C.N.R.S., 92190 Meudon (France)

² C.N.R.C., Section Géotechnique, I.R.C., Ottawa (Canada) K1A 0R6

Résumé

Dans cette communication est présentée une modélisation numérique du problème de Stefan dans un domaine bidimensionnel isotrope à caractéristiques thermophysiques non uniformes. Le modèle, exploité sur micro-ordinateur, permet de localiser, avec des temps de calculs assez courts, la position du front de changement de phase très précisément à chaque instant. Le modèle utilise la technique des directions alternées, appliquée à une discrétisation par différences finies. Aux noeuds ordinaires, on applique la formulation implicite de Peaceman et Rachford avec résolution par simple élimination gaussienne. Les éléments entourant le front de changement de phase sont traités à l'aide de la méthode unidimensionnelle de Goodrich. Cette méthode conduit à une solution rapide et permet de suivre continuellement la position de l'interface mobile en maintenant le caractère non linéaire du problème. Les résultats sont comparés à ceux obtenus par la méthode enthalpique bidimensionnelle à éléments finis proposée en 1986 par Cames-Pintaux et Nguyen-Lamba.

Abstract

This paper presents a finite difference method for the resolution of the two-dimensional Stefan Problem in an isotropic medium with inhomogeneous thermophysical characteristics. The model uses the A.D.I. method, the implicit formulation of Peaceman and Rachford for the resolution at ordinary nodes, and the Goodrich method for localization of the frost line, in the elements where phase change is present.

With the adopted techniques for the construction of the model, the non-linear character of the problem is respected and rapid calculations lead to accurate determination of the frost line position at every moment.

Results are compared with those obtained from the more sophisticated two-dimensional enthalpic model proposed in 1986 by Cames-Pintaux and Nguyen-Lamba using the finite elements method.

Introduction

Les problèmes de transferts thermiques avec changement de phase interviennent dans de nombreux domaines techniques où les conditions de températures peuvent provoquer le gel ou le dégel des sols. L'entretien des chaussées, la construction et la maintenance des routes, la congélation artificielle des sols, le transport énergétique (gazoducs, oléoducs), le stockage souterrain de gaz liquéfiés, constituent des cas où le gel ou le dégel doivent être considérés. On peut encore citer les systèmes à changement de phase contrôlé, pour le stockage d'énergie thermique, où les chaleurs latentes mises en cause sont bien supérieures aux chaleurs sensibles.

Les problèmes rencontrés sont souvent multidimensionnels et concernent des domaines de formes irrégulières. Relativement peu d'études analytiques ou de méthodes numériques existent pour résoudre le problème de STEFAN à deux ou trois dimensions. Ceci s'explique par le fait que les techniques utilisées pour la résolution des problèmes unidimensionnels ne peuvent pas s'appliquer facilement aux problèmes de dimensions supérieures.

La plupart des solutions numériques des problèmes de changement de phase se font à l'aide de deux types d'approche. Les méthodes du premier type considèrent le front mobile de changement de phase comme une surface de discontinuité. Ces méthodes prennent comme variable soit la température (Hsu *et al.*, 1981; Lynch & O'Neil, 1981; Yoo & Rubinski, 1983), soit l'enthalpie (Cames-Pintaux & Nguyen-Lamba, 1986). Les méthodes du deuxième type utilisent nécessairement le concept d'enthalpie, ne tiennent pas compte explicitement d'une interface mobile et conduisent à traiter un problème thermique fortement non linéaire (Voller & Cross, 1981; Lewis *et al.*, 1984; Rolph & Bathe 1982).

Les auteurs ont déjà proposé deux modèles pour résoudre le problème de changement de phase considérant un front mobile à température fixe. Le premier modèle, bidimensionnel enthalpique, fait appel à la méthode des éléments finis (Cames-Pintaux & Nguyen-Lamba, 1986). Le deuxième modèle, utilisant comme variable la température, traite une géométrie axisymétrique unidimensionnelle où évolue également une frontière de discontinuité (Cames-Pintaux *et al.* 1983). Ce modèle permet d'estimer rapidement

l'évolution du front du changement de phase dans le sol. Ces deux études ont été faites pour étudier le cas particulier du comportement thermique d'une station pilote de stockage cryogénique souterrain (Cames-Pintaux *et al.*, 1986). Le modèle axisymétrique peut aussi représenter le cas des conduites enterrées (Cames-Pintaux & Aguirre-Puente, 1987).

D'une manière générale, les méthodes avec front mobile, utilisant la température comme variable, sont en principe capables de donner des résultats d'une très bonne précision, particulièrement en ce qui concerne la localisation des fronts de changement de phase. Par ailleurs, les versions basées sur un maillage déformant sont très précises mais demandent un temps de calcul très long.

La méthode de Goodrich pour traiter le changement de phase est rapide, modélise plus réellement le phénomène d'interface et donne une bonne précision, mais elle a été utilisée uniquement pour le cas unidimensionnel (Goodrich, 1978) et son équivalent axisymétrique (Cames-Pintaux *et al.* 1983).

Le but de la présente recherche est de développer, pour des problèmes géotechniques, des modèles bidimensionnels, et éventuellement tridimensionnels, qui tiennent compte des phénomènes essentiels, tout en étant assez rapides pour être pratiqués sur micro-ordinateur.

Il est connu depuis longtemps que la technique la plus rapide pour la résolution des équations paraboliques, comme les équations de diffusion de chaleur et de masse, est la méthode des directions alternées. Cette méthode, qui est nécessairement limitée aux maillages rectangulaires, a été développée à l'origine pour les différences finies. Hayes (1980) a démontré que ces avantages peuvent être exploités aussi dans le contexte des éléments finis, si on utilise les éléments isoparamétriques quadrilatères à la place des maillages triangulaires.

Il semble donc possible de pouvoir résoudre le problème multidimensionnel de Stefan en associant la méthode des directions alternées et la méthode de Goodrich afin d'exploiter leurs avantages respectifs.

Dans cette communication, nous proposons un modèle bidimensionnel du problème de changement de phase, basé sur les différences finies, en utilisant un front mobile.

Après l'énoncé général du problème de STEFAN et un rappel du modèle enthalpique, les caractéristiques de cette nouvelle modélisation bidimensionnelle, qui utilise une méthode de directions alternées, sont développées. Les résultats obtenus sont comparés, pour une même géométrie, à ceux obtenus de l'application du modèle enthalpique plus élaboré traité par la méthode des éléments finis (Cames-Pintaux & Nguyen-Lamba, 1986).

Modèle mathématique de Stefan

Dans un domaine bidimensionnel homogène Ω , dépourvu de sources ou de puits, on considère une substance

pure avec une phase solide et une phase liquide. La surface S qui sépare ces deux régions est isotherme à la température fixe de changement de phase T_f , pendant l'intervalle de temps $(0, t_m)$.

La frontière de Ω est divisée en trois zones $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$, avec différentes conditions aux limites:

- sur Γ_1 : $T = T_1(t)$, sur Γ_2 : $T = T_2(t)$, (conditions de Dirichlet)
- sur Γ_3 : $\delta T / \delta n = 0$, (condition de Neumann avec flux nul).

En négligeant la convection, les équations de conservation de l'énergie s'écrivent:

-dans la zone solide,

$$c_s * \delta T / \delta t - \text{div}(k_s * \text{grad } T) = 0 \quad (1)$$

-dans la zone liquide,

$$c_l * \delta T / \delta t - \text{div}(k_l * \text{grad } T) = 0 \quad (2)$$

k et c sont respectivement la conductivité thermique et la chaleur volumique, les indices s et l correspondent respectivement à la région gelée et à la région non gelée du domaine.

A l'interface mobile S , $T = T_f$, et l'équation du bilan thermique s'écrit:

$$(k_s * \delta T / \delta n)_s - (k_l * \delta T / \delta n)_l = L_v * (\delta S / \delta t)_e * \vec{n} \quad (3)$$

$(\delta S / \delta t)_e$ étant la vitesse, \vec{n} la normale unitaire en chaque point du front et L_v la chaleur latente par unité de volume.

La distribution initiale de température dans le domaine Ω s'écrit:

$$T(x, y, 0) = T_0 \text{ pour } t = 0.$$

Modèle bidimensionnel enthalpique

Les solutions numériques des problèmes de changement de phase utilisant des méthodes enthalpiques ne tiennent en général pas compte explicitement de l'interface mobile. En effet, l'enthalpie utilisée comme variable indépendante, fonction de la température, inclut les effets de la chaleur spécifique et de la chaleur latente dégagée dans une plage de températures plus ou moins large comme dans certains milieux dispersés. Le changement de phase n'est pas traité comme une discontinuité dans les calculs et le problème de STEFAN est remplacé par un problème sans changement de phase avec propriétés thermiques non linéaires. La progression du front de changement de phase est déterminée à chaque pas de temps par interpolation dans le champ de températures et peut présenter ainsi une certaine imprécision.

Avec l'aide de la transformation de Kirchhoff (potentiel thermique) et de la fonction de Heaviside, une méthode enthalpique par éléments finis a été mise au point (Cames-Pintaux & Nguyen-Lamba, 1986) en utilisant la formulation mathématique du problème de STEFAN proposée par Damlamian (1977). Contrairement aux autres méthodes

enthalpiques existantes, cette méthode présente l'avantage de pouvoir traiter le cas d'une surface de discontinuité séparant les zones gelée et non gelée et donne une solution régulière à chaque pas de temps.

Les caractéristiques thermophysiques du milieu c_s , c_l , k_s et k_l peuvent être des fonctions continues de T sauf à l'interface de changement de phase où une discontinuité peut exister.

La méthode a été utilisée pour la résolution du problème de STEFAN avec solidification ou fusion en utilisant des géométries et des conditions aux limites différentes. Plus particulièrement, le comportement thermique du sol entourant la cavité, précédemment citée, de 3m de diamètre enterrée à une profondeur de 23m a été étudié à l'aide de ce modèle (Fig.1). La comparaison des résultats obtenus avec les mesures relevées dans la station pilote, suivant différents axes, pendant une durée de 300 jours, a montré la validité et la bonne précision de cette modélisation bidimensionnelle (Fig.2) (Cames-Pintaux *et al.*, 1986).

Méthode de Goodrich

La méthode de Goodrich permet de localiser efficacement l'interface dans les systèmes unidimensionnels multicouches avec une très grande précision. La modélisation utilise pour la discrétisation aux noeuds ordinaires les différences finies centrées, avec résolution gaussienne. L'élément subissant le changement de phase est

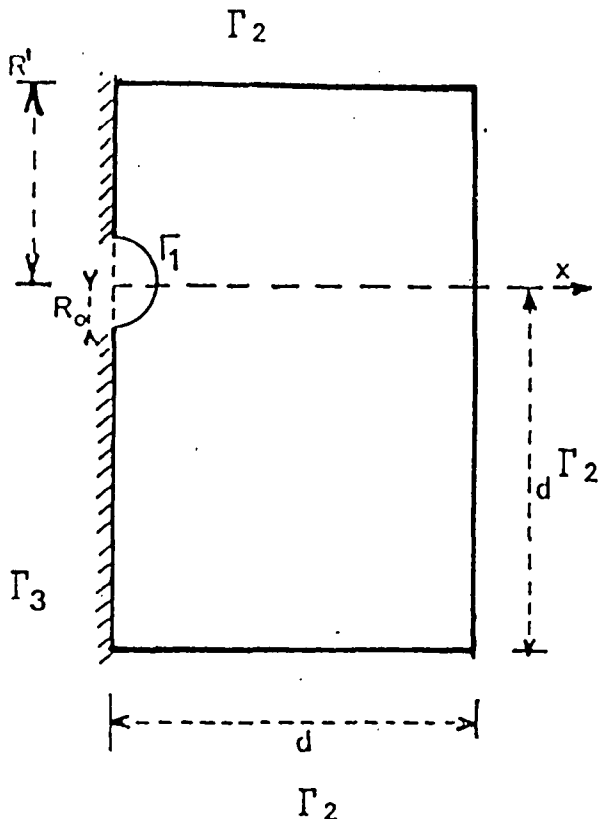


Figure 1 : Domaine bidimensionnel, cavité souterraine.

traité par une technique qui suit continûment l'évolution de la position exacte de l'interface au moyen d'une formulation qui conserve le caractère non linéaire du problème, sans recourir à des coûteuses itérations pour sa résolution.

Cette méthode unidimensionnelle a été adoptée pour résoudre des problèmes axisymétriques (Cames-Pintaux *et al.*, 1983). Les résultats obtenus se sont aussi révélés en bonne concordance avec les mesures effectuées dans la station pilote de stockage cryogénique.

Nouvelle méthode proposée

On se propose de traiter le problème de STEFAN bidimensionnel avec une surface de discontinuité séparant les phases solide et liquide.

Une première étape de la recherche consiste en l'utilisation de la méthode des directions alternées (A.D.I.) et de la méthode de Goodrich dans un domaine discrétisé par différence finies. La version présentée ici utilise un maillage rectangulaire non uniforme et permet de tenir compte des propriétés thermiques isotropes et non homogènes.

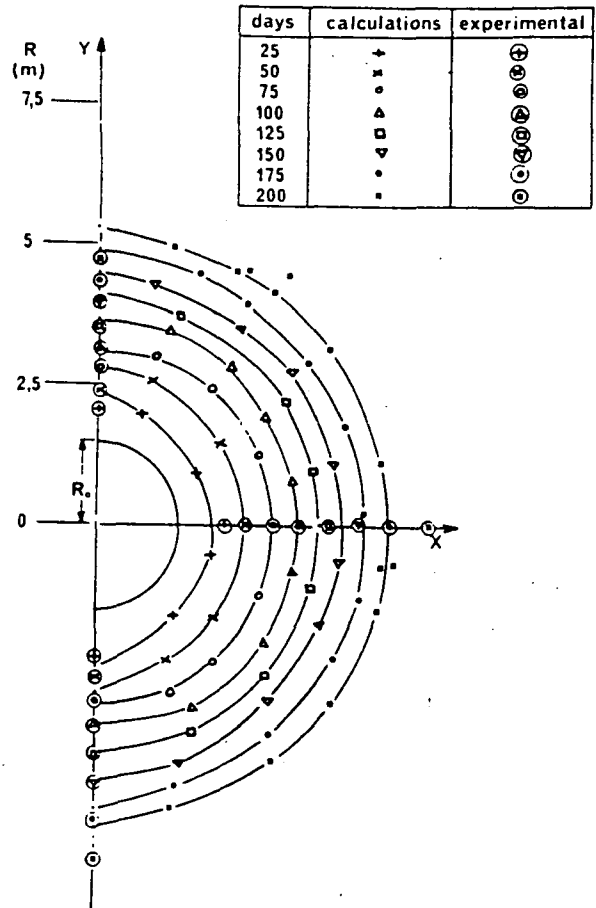


Figure 2 : Domaine bidimensionnel, station pilote.

Les caractéristiques thermophysiques $k_s(i,j)$, $k_l(i,j)$, $c_s(i,j)$ et $c_l(i,j)$ sont supposées uniformes à l'intérieur de la maille (i,j) . Cette maille possède des dimensions rectangulaires $dx(i)$ sur l'axe horizontal et $dy(j)$ sur l'axe vertical. Elle est limitée par les noeuds (i,j) , $(i+1,j)$, $(i,j+1)$, $(i+1,j+1)$.

On considère le noeud d'indices (i,j) (Fig.3), contigu aux mailles $(i-1,j-1)$, $(i,j-1)$, $(i-1,j)$ et (i,j) appelées, pour simplifier les mailles I, II, III et IV.

Les caractéristiques géométriques et thermophysiques (conductivité thermique k_m et chaleur volumique c_m) de ces mailles sont les suivantes.

- maille I : $dx(i-1)$, $dy(j-1)$, $k_m(i-1,j-1)$, $c_m(i-1,j-1)$,
- maille II : $dx(i)$, $dy(j-1)$, $k_m(i,j-1)$, $c_m(i,j-1)$,
- maille III : $dx(i-1)$, $dy(j)$, $k_m(i-1,j)$, $c_m(i-1,j)$,
- maille IV : $dx(i)$, $dy(j)$, $k_m(i,j)$, $c_m(i,j)$

(l'indice $m = s$ si la phase est solide et $m = l$ si elle est liquide).

On établit alors le bilan thermique au sein de l'élément rectangulaire (a,b,c,d) , de dimensions $[dx(i-1)/2 + dx(i)/2]$ et $[dy(i-1)/2 + dy(i)/2]$, entourant le noeud (i,j) . Pendant l'intervalle de temps dt , la chaleur convergeant ou créée au noeud (i,j) est égale à l'accroissement d'énergie interne de l'élément considéré.

La capacité thermique de l'élément (a,b,c,d) , notée $C_m(i,j)$, est égale à:

$$\begin{aligned}
 & [c_m(i-1,j-1) * dx(i-1)/2 * dy(j-1)/2 \\
 & + c_m(i,j-1) * dx(i)/2 * dy(j-1)/2 \\
 & + c_m(i-1,j) * dx(i-1)/2 * dy(j)/2 \\
 & + c_m(i,j) * dx(i)/2 * dy(j)/2] \quad (4)
 \end{aligned}$$

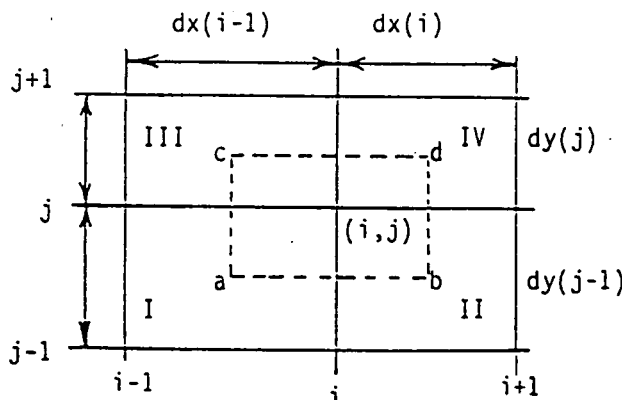


Figure 3 : Mailles utilisées pour le milieu non uniforme.

Les coefficients de conductance $K_{k_{xm}}(i,j)$ et $K_{k_{ym}}(i,j)$, pour une largeur unitaire dz , sont:

$$\begin{aligned}
 K_{k_{xm}}(i,j) &= [(k_m(i,j-1) * dy(j-1)/2 + k_m(i,j) * dy(j)/2)] \\
 & / dx(i), \\
 K_{k_{ym}}(i,j) &= [(k_m(i-1,j) * dx(i-1)/2 + k_m(i,j) * dx(i)/2)] \\
 & / dy(j).
 \end{aligned}$$

La formulation implicite des directions alternées de Peaceman et Rachford consiste à effectuer une double itération pendant l'intervalle de temps dt en le partageant en deux pas de temps, notés dt_1 et dt_2 .

Le transfert thermique entre les instants $(t = n*dt)$ et $(t = (n+1)*dt)$ est alors obtenu en faisant intervenir deux discrétisations différentes:

la première à l'instant $t_1 = (t + dt_1)$,

la deuxième à l'instant $t_2 = (t_1 + dt_2)$, soit $t_2 = (n+1) * dt$.

A l'instant t_1 , l'accroissement d'énergie interne de l'élément (a,b,c,d) est égal à la somme des quantités de chaleur $Q_{m1}(i-1,j)$ et $Q_{m1}(i+1,j)$, calculées à l'instant t_1 , traversant les parois (a,c) , (b,d) et des quantités de chaleur $Q_m(i,j-1)$ et $Q_m(i,j+1)$, calculées à l'instant t_2 , traversant les parois (a,b) , (c,d) . L'élimination gaussienne unidimensionnelle peut alors s'appliquer sur toutes les lignes verticales.

A l'instant t_2 , seul l'intervalle de temps dt_2 est concerné et l'accroissement d'énergie interne de l'élément (a,b,c,d) est alors égal à la somme des quantités de chaleur $Q_{m1}(i-1,j)$ et $Q_{m1}(i+1,j)$ traversant les parois (a,c) et (b,d) et des quantités de chaleur $Q_{m2}(i,j-1)$ et $Q_{m2}(i,j+1)$ traversant les parois (a,b) et (c,d) . Les quantités de chaleur Q_{m2} sont calculées en considérant les densités de flux à l'instant $t_2 = t_1 + dt_2$.

CHAMP THERMIQUE

Les températures au noeud (i,j) sont notées:

$T(i,j,n)$ au pas de temps $t = n * dt$, $T(i,j,1)$ au pas de temps $t_1 = t + dt_1$ et $T(i,j,2)$ au pas de temps $t_2 = (n+1) * dt$, c'est à dire $(t_1 + dt_2)$.

Au noeud (i,j) situé à l'intérieur de l'élément non homogène (sans front de changement de phase), les équations discrétisées de conservation de l'énergie peuvent s'écrire:

au pas de temps t_1 ,

$$\begin{aligned}
 & - K_{k_{xm}}(i-1,j) * T(i-1,j,1) + [C_m(i,j)/dt_1 + K_{k_{xm}}(i-1,j) \\
 & + K_{k_{xm}}(i,j)] * T(i,j,1) - K_{k_{xm}}(i,j) * T(i+1,j,1) \\
 & = K_{k_{ym}}(i,j-1) * T(i,j-1,n) + [C_m(i,j)/dt_1 - K_{k_{ym}}(i,j-1) \\
 & - K_{k_{ym}}(i,j)] * T(i,j,n) + K_{k_{ym}}(i,j) * T(i,j+1,n). \quad (5)
 \end{aligned}$$

au pas de temps t_2 ,

$$\begin{aligned} & -K_{k_{ym}}(i,j-1) * T(i,j-1,2) + [C_m(i,j)/dt_2 + K_{k_{ym}}(i,j-1) \\ & + K_{k_{ym}}(i,j)] * T(i,j,2) - K_{k_{ym}}(i,j) * T(i,j+1,2) \\ & = K_{k_{xm}}(i-1,j) * T(i-1,j,1) + [C_m(i,j)/dt_2 - K_{k_{xm}}(i-1,j) \\ & - K_{k_{xm}}(i,j)] * T(i,j,1) + K_{k_{xm}}(i,j) * T(i+1,j,1). \end{aligned} \quad (6)$$

La résolution de ces systèmes donnant la distribution de température se fait par résolution gaussienne alternativement suivant l'axe des X, pour chaque ligne horizontale d'indice j du domaine au temps t_1 (équation (5)), et suivant l'axe des Y, pour chaque ligne verticale d'indice i au temps t_2 (équation (6)).

TRAITEMENT DU FRONT DE CHANGEMENT DE PHASE

Pour localiser précisément la position du front de changement de phase, à l'intérieur de la maille concernée, les éléments entourant le front mobile sont traités alternativement suivant l'une et l'autre direction. L'utilisation de la méthode de Goodrich unidimensionnelle conduit à des temps de calculs assez courts.

Considérons d'abord le pas de temps t_1 .

Pour chaque ligne horizontale d'indice j, on détermine la position du front uniquement suivant l'axe des X. Supposons qu'il soit situé à l'intérieur d'un élément de volume limité par les noeuds (p,j) et (p+1,j) (Fig.4). L'élément peut être partagé en deux zones a et b de caractéristiques thermophysiques respectives $c_m(a,j)$, $k_m(a,j)$ et $c_m(b,j)$, $k_m(b,j)$. En utilisant les différences finies centrées, le bilan thermique s'écrit:

au noeud (p,j):

$$A1 = B1 \quad (7)$$

avec

$$\begin{aligned} A1 = & [c_m(p-1,j-1) * dx(p-1)/2 * dy(j-1)/2 \\ & + c_m(p-1,j) * dx(p-1)/2 * dy(j)/2 \\ & + c_m(a,j-1) * GX(a,j)/2 * dy(j-1)/2 \\ & + c_m(a,j) * GX(a,j)/2 * dy(j)/2 \\ & * 2 / (dt_1) * [T(p,j,1) - T(p,j,n)] \end{aligned}$$

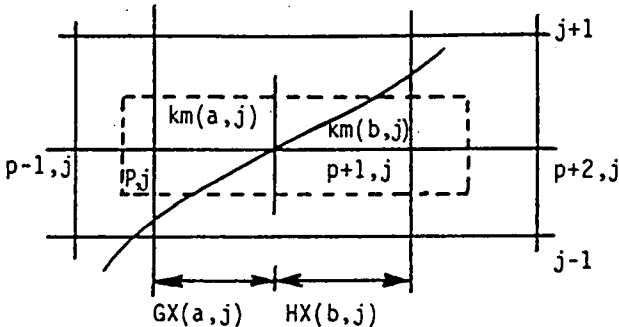


Figure 4: Mailles utilisées pour le traitement du front suivant X.

et

$$\begin{aligned} B1 = & [k_m(p-1,j-1) * dy(j-1) + k_m(p-1,j) * dy(j)] \\ & * [T(p-1,j,1) - T(p,j,1)] / dx(p-1) \\ & + [k_m(a,j-1) * dy(j-1) + k_m(a,j) * dy(j)] \\ & * [T_f - T(p,j,1)] / GX(a,j) \\ & + [k_m(p-1,j-1) * dx(p-1) + k_m(a,j-1) * GX(a,j)] \\ & * [T(p,j-1,n) - T(p,j,n)] / dy(j-1) \\ & + [k_m(p-1,j) * dx(p-1) + k_m(a,j) * GX(a,j)] \\ & * [T(p,j+1,n) - T(p,j,n)] / dy(j). \end{aligned}$$

Dans ces équations $GX(a,j) = [GX_n(p,j) + GX_1(p,j)]/2$; GX_n et GX_1 représentent la distance du noeud (p,j) à l'isotherme T_f respectivement au début et à la fin du pas de temps t_1 , GX_n ayant été calculé au pas de temps précédent.

De même au noeud (p+1,j):

$$A2 = B2 \quad (8)$$

avec

$$\begin{aligned} A2 = & [c_m(b,j-1) * HX(b,j)/2 * dy(j-1)/2 \\ & + c_m(b,j) * HX(b,j)/2 * dy(j)/2 \\ & + c_m(p+1,j-1) * dx(p+1)/2 * dy(j-1)/2 \\ & + c_m(p+1,j) * dx(p+1)/2 * dy(j)/2 \\ & * 2 / (dt_1) * [T(p+1,j,1) - T(p+1,j,n)] \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} B2 = & [k_m(b,j-1) * dy(j-1) + k_m(b,j) * dy(j)] \\ & * [T_f - T(p+1,j,1)] / HX(b,j) \\ & + [k_m(p+1,j-1) * dy(j-1) + k_m(p+1,j) * dy(j)] \\ & * [T(p+2,j,1) - T(p+1,j,1)] / dx(p+1) \\ & + [k_m(b,j-1) * HX(b,j) + k_m(p+1,j-1) * dx(p+1)] \\ & * [T(p+1,j-1,n) - T(p+1,j,n)] / dy(j-1) \\ & + [k_m(b,j) * HX(b,j) + k_m(p+1,j) * dx(p+1)] \\ & * [T(p+1,j+1,n) - T(p+1,j,n)] / dy(j). \end{aligned}$$

en posant $HX(b,j) = dx(p) - GX(a,j)$.

La condition à la frontière mobile est approximée par l'équation:

$$\begin{aligned} L_v * 2 * [GX_1(p,j) - GX_n(p,j)] / (dt_1) \\ = & k_m(a,j) * [T(p,j,1) + T(p,j,n)] / GX(a,j) \\ & + k_m(b,j) * [T(p+1,j,1) + T(p+1,j,n)] / HX(b,j) \end{aligned} \quad (9)$$

Le terme GX_1 n'est pas connu explicitement. Le système non linéaire d'équations (7) à (9) fait intervenir une équation implicite de la forme

$$f[GX_1(p,j), T(p,j,1), T(p+1,j,1)] = 0$$

que l'on peut résoudre à l'aide de la méthode itérative de Newton.

Le lecteur est invité à se référer à Goodrich, 1978 et Cames-Pintaux *et al.*, 1983 pour une description plus complète de la résolution du système complet d'équations.

La distribution des positions $GX_1(p,j)$ de la frontière mobile sur les lignes horizontales d'indice j permet d'obtenir, par interpolations, les valeurs de $GY_1(i,q)$ sur les lignes verticales d'indice i .

Au pas de temps t_1 , on procède de manière similaire mais suivant l'axe des Y (Fig.5).

SOLUTION DU PROBLÈME DISCRÉTISÉ

La résolution des différentes équations au pas de temps intermédiaire t_1 , puis au temps t_2 , donne d'une façon précise la distribution des températures et la position de l'interface à l'instant $t = (n+1) * dt$.

Cette méthode par directions alternées permet à chaque instant de suivre, sur chaque ligne horizontale et sur chaque ligne verticale du domaine, la position de l'interface mobile. La formulation adoptée maintient le caractère non linéaire du problème et conduit à une solution rapide.

Pour le cas d'une géométrie plane bidimensionnelle, la méthode proposée avec front mobile permet ainsi de connaître à tout instant le champ thermique à l'intérieur du domaine et la localisation très précise du front de changement de phase. Cette méthode présente l'avantage d'être utilisable sur micro-ordinateur et nécessite relativement peu de temps de calcul.

Exemples numériques

Une vérification de la validité de la méthode bidimensionnelle proposée a été faite. Pour cela, on a

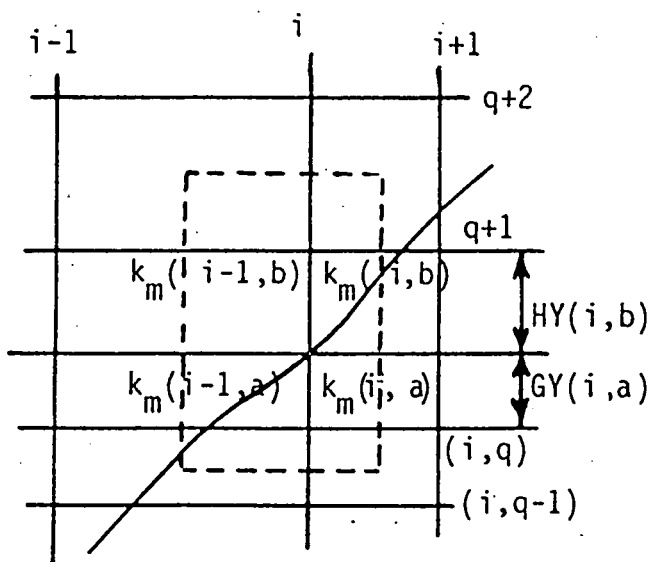


Figure 5. Mailles utilisées pour le traitement du front suivant Y .

comparé les résultats obtenus en appliquant cette méthode aux résultats obtenus précédemment par la méthode enthalpique dans le cas d'un problème représentatif des problèmes de changement de phase.

Il s'agit du comportement thermique d'une unité de stockage en contact avec l'écoulement d'un fluide caloporteur dont la température varie avec le temps (Cames-Pintaux & Nguyen-Lamba, 1986). L'unité de stockage ayant la forme d'un parallélogramme rectangulaire, le transfert thermique est considéré bidimensionnel. Une partie Γ_3 de la frontière est isolée. Sur la partie Γ_1 non isolée, la circulation du fluide impose la température T_1 . Cette température est donnée à chaque pas de temps t par la fonction:

$$T_1 = T_f + T_m * \sin wt$$

pour $T_m = 20^\circ\text{C}$ et une période de 6 heures.

Deux cas sont considérés correspondant à deux dispositions différentes de Γ_1 et Γ_3 sur la frontière du parallélogramme définies par les figures 5 et 6.

Pour les calculs nous avons adopté les caractéristiques thermiques suivantes (semblables à celle de la paraffine):

Tableau I. Caractéristiques thermiques				
c_s	c_l	k_s	k_l	L_v
kJ.m^{-3}	kJ.m^{-3}	$\text{W.m}^{-1}\text{.K}^{-1}$	$\text{W.m}^{-1}\text{.K}^{-1}$	kJ.kg^{-1}
1546600	1790481	0.350	0.165	241

Le changement de phase s'effectue à la température $T_f = 27.5^\circ\text{C}$.

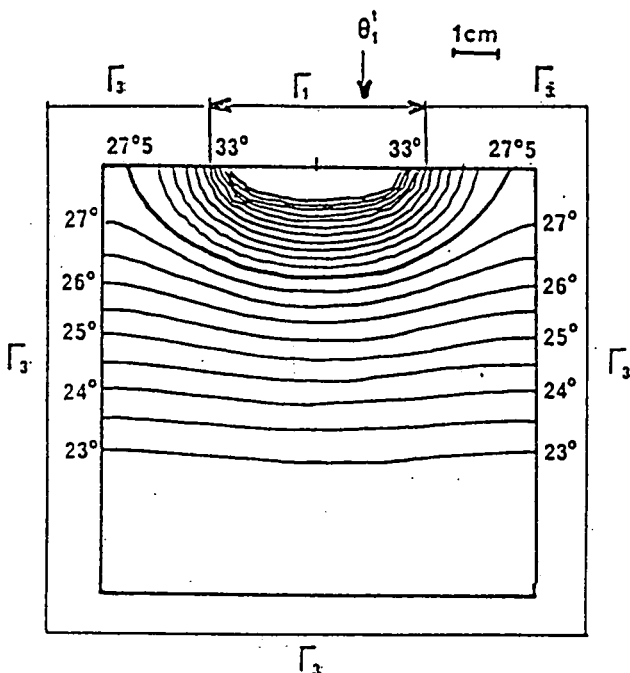


Figure 6: Unité de stockage, 1er cas, isothermes à $t=7230s$ par méthode enthalpique.

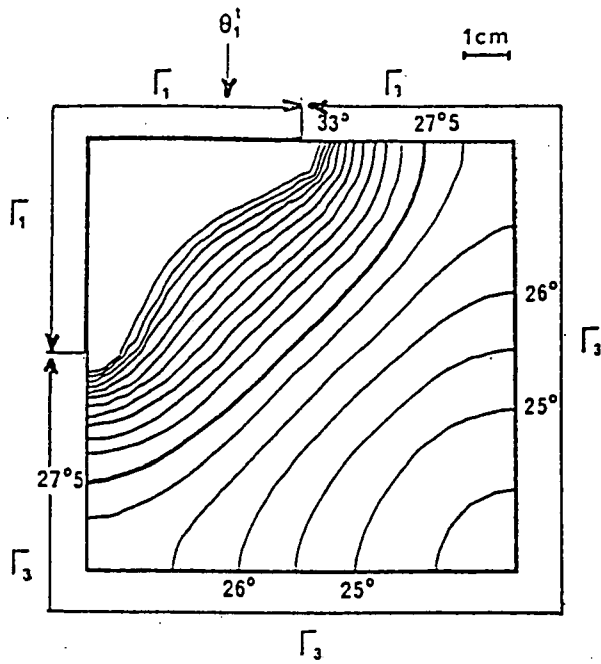


Figure 7. Unité de stockage, 2e cas, isothermes à $t=7230s$ par méthode enthalpique.

Pour les conditions aux limites indiquées, les figures 6 et 7 montrent les isothermes calculés à l'instant $t = 7230 s$, pour un carré de $10 * 10 \text{ cm}^2$, à l'aide de la méthode enthalpique par éléments finis utilisant un maillage composé de 800 triangles réguliers.

Pour les mêmes problèmes, les résultats obtenus par la méthode proposée dans cette communication sont représentés au même temps t sur les figures 8 et 9. Les valeurs de dx et dy sont toutes deux égales à 0.5 cm (400 carrés). On constate que ce nouveau modèle bidimensionnel donne des résultats numériques satisfaisants compte tenu que les calculs sont effectués sur un micro-ordinateur. La méthode enthalpique doit en effet être exploitée sur un ordinateur de grande capacité en raison de la formulation mathématique nécessaire au traitement bidimensionnel par éléments finis.

Ces applications sont les premières d'une étude en cours. Des résultats plus avancés pour différentes géométries et conditions aux limites feront l'objet de publications ultérieures avec application à des problèmes géotechniques.

Conclusion

Une méthode numérique implicite de directions alternées avec front mobile a été développée pour la résolution de problèmes thermiques bidimensionnels avec changement de phase. Bien que les travaux de recherche sur ce sujet soient encore à leurs débuts, les résultats obtenus montrent que la méthode proposée mérite une étude approfondie afin de bien connaître ses capacités.

La combinaison de la méthode A.D.I. de Peaceman et Rachford et de l'approche de Goodrich pour les interfaces

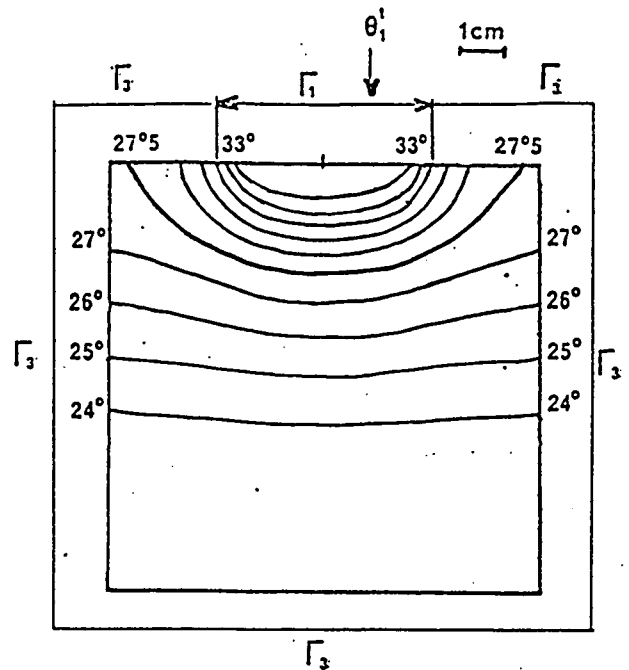


Figure 8. Unité de stockage, 1er cas, isothermes à $t=7230s$ par méthode ADI avec front mobile.

mobiles s'avère satisfaisante et rapide. Il reste cependant à vérifier la précision des solutions en tenant compte de mesures relevées dans des cas réels rencontrés en génie civil.

La méthode ci-dessus, utilisable sur micro-ordinateur, peut être appliquée à l'étude de domaines géométriques et conditions aux limites très divers. A l'avenir, cette formulation sera incorporée dans un modèle en éléments finis conçu spécifiquement pour les applications géotechniques.

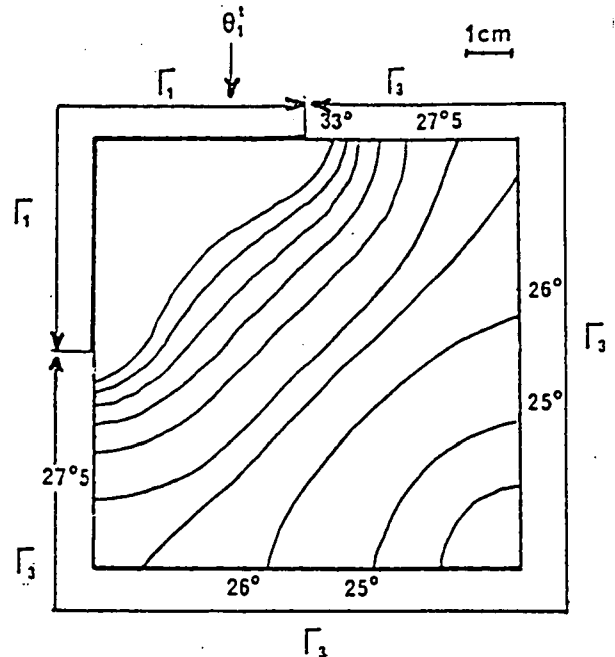


Figure 9. Unité de stockage, 2e cas, isothermes à $t=7230s$ par méthode ADI avec front mobile.

Notations

T	température
T_f	température de changement de phase
t	temps
dt	pas de temps
k_m	conductivité thermique
c_m	chaleur volumique (chaleur massique * masse volumique)
K_{kxm}	coefficient de conductance
C_m	capacité thermique
L_v	chaleur latente par unité de volume
x,y	coordonnées d'espace
dx	intervalle suivant l'axe des X
dy	intervalle suivant l'axe des Y

indices	
i,	indice des noeuds sur l'axe des X
j,	indice des noeuds sur l'axe des Y
n,	indice du pas de temps
p,	indice du noeud pour l'élément suivant l'interface sur l'axe des X
q,	indice du noeud pour l'élément suivant l'interface sur l'axe des Y
s,	zone solide
l,	zone liquide
m,	indique l'état solide ou liquide (m = s ou l)

Références

- CAMES-PINTAUX, A.M., GIAT, M., AGUIRRE-PUENTE, J., 1983. Introduction de nouvelles géométries et conditions aux limites dans la méthode de Goodrich pour le changement de phase. C. R. XVIème Congrès Int. du Froid, Paris, t. II, 595-602.
- CAMES-PINTAUX, A.M., NGUYEN-LAMBA, M., 1986. Finite-element enthalpy method for discrete phase change. Num. Heat Transfer, 9, 403-417.
- CAMES-PINTAUX, A.M., NGUYEN-LAMBA, M., AGUIRRE-PUENTE, J. 1986. Numerical two dimensional study of thermal behaviour around a cylindrical cooled underground cavity. Domain of validity of an axisymmetrical scheme. Cold Regions Sciences and Technology, 12, 105-114.
- CAMES-PINTAUX, A.M., AGUIRRE-PUENTE, J., 1987. Problème de Stefan appliqué à l'étude des cavités souterraines et conduites enterrées. C.R. XVIIème Congrès Int. du Froid, Vienne, Vol. B, 241-248.
- DAMLAMIAN, A., 1977. Some results on the multiphase Stefan Problem. Commun. Partial Differential Equations, 2, n°10, 1017-1044.
- GOODRICH, L.E., 1978. Efficient numerical technique for one dimensional thermal problem with phase change. Int. J. Heat Mass Transfer, 21, 615-621.
- HAYES, L., 1980. Implementation of finite element alternating-direction methods on non rectangular regions. Int. J. Numerical Meth. Eng., 16, 35-49.
- HSU, C.F., SPARROW, E.M., PATANKAR, S.V., 1981. Numerical solution of moving boundary problems by boundary immobilization and a control-volume based finite difference scheme. Int. J. Heat Mass Transfer, 24, 1335-1343.
- LEWIS, R.W., MORGAN, K., ROBERTS, P.M., 1984. Application of an alternating-direction finite-element method to heat transfer problems involving a change of phase. Num. Heat Transfer, 7, 471-482.
- LYNCH, D.R., O'NEIL, K., 1981. Continuous deforming finite elements for the solution of parabolic problems with and without phase change. Int. J. Numerical Eng., 17, 81-96.
- ROLPH, W.D., BATHE, K.J., 1982. An efficient algorithm for analysis of non linear heat transfer with phase changes. Int. J. Numerical Meth. Eng., 18, 119-134.
- VOLLER, V., CROSS, M., 1981. Accurate solutions of moving boundary problems using the enthalpy method. Int. J. Heat Mass Transfer, 24, 545-555.
- YOO, J., RUBINSKI, B., 1983. Numerical computation using finite elements for the moving interface in heat transfer problems with phase transformation. Num. Heat Transfer, 6, 209-222.